第 33 講　相加平均と相乗平均

33　次の各問いに答えよ．

(1)　x，y，z を正の実数とする．このとき，$\dfrac{x+y+z}{3} \geqq \sqrt[3]{xyz}$ であることを示せ．

(2)　$f(x)=3x^2-2x^3$ $\left(0<x<\dfrac{3}{2}\right)$ の最大値を求めよ．

(3)　$x>1$ のとき $\dfrac{x^3-3x^2+3x}{x-1}$ の最小値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 33 講　相加平均と相乗平均

33　相加平均と相乗平均の関係を用いて，次の各問いに答えよ．
ただし，α，β，γ が正のときには「$\alpha+\beta \geqq 2\sqrt{\alpha\beta}$（等号成立は $\alpha=\beta$ のとき）」や「$\alpha+\beta+\gamma \geqq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$（等号成立は $\alpha=\beta=\gamma$ のとき）」が成り立つことは証明なしに用いてよい．

(1)　$0<x<2$ のとき $x(2-3x)$ の最大値を求めよ．

(2)　$x>0$ のとき $\dfrac{x^3+1}{x}$ の最小値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　最大値 $\dfrac{11}{36}$ $\left(x=\dfrac{1}{6}\text{ のとき}\right)$　　㋑　最大値 $\dfrac{1}{4}$ $\left(x=\dfrac{1}{2}\text{ のとき}\right)$

㋒　最大値 $\dfrac{1}{3}$ $\left(x=\dfrac{1}{3}\text{ のとき}\right)$

(2)　㋐　最小値 $\dfrac{9}{2}$（$x=2$ のとき）　　㋑　最小値 $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ $\left(x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\text{ のとき}\right)$

㋒　最小値 2（$x=1$ のとき）

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 33 講　相加平均と相乗平均

33 次の各問いに答えよ．

(1) x, y, z を正の実数とする．このとき，$\dfrac{x+y+z}{3} \geqq \sqrt[3]{xyz}$ であることを示せ．

(2) $f(x)=3x^2-2x^3$ $\left(0<x<\dfrac{3}{2}\right)$ の最大値を求めよ．

(3) $x>1$ のとき $\dfrac{x^3-3x^2+3x}{x-1}$ の最小値を求めよ．

【答】 (1) 略　(2) 最大値 1 ($x=1$ のとき)　(3) 最小値 $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ $\left(x=1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right.$ のとき$\left.\right)$

【解答】

(1)
$$\frac{x+y+z}{3}-\sqrt[3]{xyz}=\frac{1}{3}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2}-\sqrt[3]{xy}-\sqrt[3]{yz}-\sqrt[3]{zx})$$
$$=\frac{1}{6}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z})\{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^2+(\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z})^2+(\sqrt[3]{z}-\sqrt[3]{x})^2\}$$

ここで，$\sqrt[3]{x}>0$，$\sqrt[3]{y}>0$，$\sqrt[3]{z}>0$ より $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}>0$ であり，
$(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^2+(\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z})^2+(\sqrt[3]{z}-\sqrt[3]{x})^2 \geqq 0$

等号成立は $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{z}-\sqrt[3]{x}=0$ つまり $x=y=z$ のときであるので，
$\dfrac{x+y+z}{3} \geqq \sqrt[3]{xyz}$ が示された．

(2) $f(x)=x^2(3-2x)=x\times x\times(3-2x)$ である．

ここで $0<x<\dfrac{3}{2}$ より $x>0$，$3-2x>0$ であるので，(1)を用いると

$$\frac{x+x+(3-2x)}{3} \geqq \sqrt[3]{x\times x\times(3-2x)} \qquad \therefore\ 1 \geqq \sqrt[3]{x^2(3-2x)} \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つ．等号成立は $x=3-2x$ つまり $x=1$ のときである．

①を 3 乗することで $f(x) \leqq 1$ を得るので，求める最大値は **1** ($x=1$ のとき)

(3) 与式より

$$\frac{x^3-3x^2+3x}{x-1}=(x-1)^2+\frac{1}{x-1}=(x-1)^2+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x-1)}$$

である．ここで，$x>1$ より，$(x-1)^2>0$，$\dfrac{1}{2(x-1)}>0$ であるので，(1)を用いると

$$\frac{(x-1)^2+\dfrac{1}{2(x-1)}+\dfrac{1}{2(x-1)}}{3} \geqq \sqrt[3]{(x-1)^2\times\frac{1}{2(x-1)}\times\frac{1}{2(x-1)}}$$
$$\therefore\ (x-1)^2+\frac{1}{x-1} \geqq 3\times\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

が成り立つ．等号成立は $(x-1)^2=\dfrac{1}{2(x-1)}$ つまり $x=1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のときである．

$3\times\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ より，求める最小値は $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}}$ $\left(x=1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right.$ のとき$\left.\right)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 33 講　相加平均と相乗平均

33　相加平均と相乗平均の関係を用いて，次の各問いに答えよ．

ただし，α，β，γ が正のときには「$\alpha+\beta \geqq 2\sqrt{\alpha\beta}$（等号成立は $\alpha=\beta$ のとき）」や「$\alpha+\beta+\gamma \geqq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$（等号成立は $\alpha=\beta=\gamma$ のとき）」が成り立つことは証明なしに用いてよい．

(1)　$0<x<2$ のとき $x(2-3x)$ の最大値を求めよ．

(2)　$x>0$ のとき $\dfrac{x^3+1}{x}$ の最小値を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　最大値 $\dfrac{11}{36}$ $\left(x=\dfrac{1}{6}\right.$ のとき$\left.\right)$　㋑　最大値 $\dfrac{1}{4}$ $\left(x=\dfrac{1}{2}\right.$ のとき$\left.\right)$

㋒　最大値 $\dfrac{1}{3}$ $\left(x=\dfrac{1}{3}\right.$ のとき$\left.\right)$

(2)　㋐　最小値 $\dfrac{9}{2}$ （$x=2$ のとき）　㋑　最小値 $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ $\left(x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right.$ のとき$\left.\right)$

㋒　最小値 2（$x=1$ のとき）

【答】 (1) ㋒　(2) ㋑

【解答】

(1)　$\dfrac{2}{3} \leqq x<2$ のとき，$x(2-3x) \leqq 0$ となる．

$0<x<\dfrac{2}{3}$ のとき，$3x>0$，$2-3x>0$ より，相加平均と相乗平均の関係より

$$3x+(2-3x) \geqq 2\sqrt{3x(2-3x)} \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．等号が成立するのは $3x=2-3x$ つまり $x=\dfrac{1}{3}$ のときである．

このとき，①より $1 \geqq \sqrt{3x(2-3x)}$ したがって $1 \geqq 3x(2-3x)$ ゆえに $x(2-3x) \leqq \dfrac{1}{3}$ が成り立つ．

以上より，求める最大値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ $\left(x=\dfrac{1}{3}\right.$ のとき$\left.\right)$

(2)　$x>0$ のとき $x^2>0$，$\dfrac{1}{2x}>0$ である．

このとき

$$\frac{x^3+1}{x}=x^2+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x} \geqq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2x}}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

が成り立つ．等号は $x^2=\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{2x}$ つまり $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき成り立つ．

よって求める最小値は $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}}$ $\left(x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right.$ のとき$\left.\right)$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。